strøm, styring & it

euc nordvest

Trigonometri

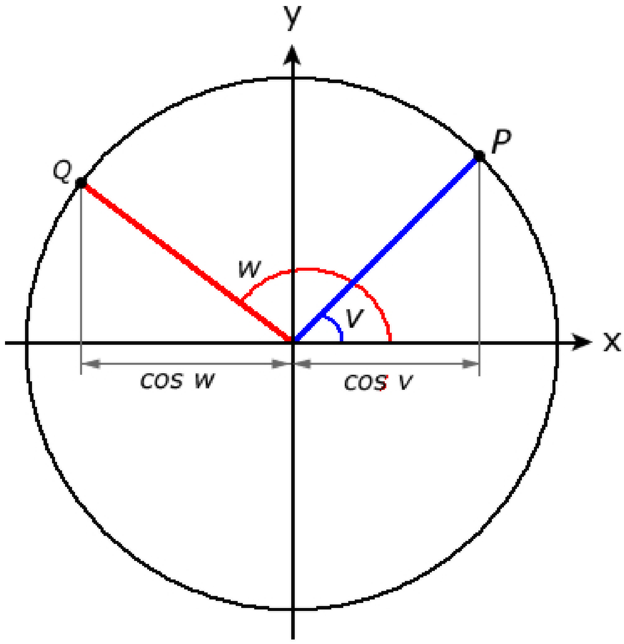
- undervisningsnote -

2008 Peter Valberg

De trigonometriske funktioner

Cosinus (cos)

I en *enhedscirkel* (hvor radius er lig med 1) begrænser en ret linie (den blå) sammen med x-aksen vinklen ***v*** med toppunkt i cirklens centrum. Når denne linies skæringspunkt (**P**) med cirkelperiferien projiceres (nedfældes vinkelret) på x-aksen, da vil afstanden fra cirklens centrum til **P**'s projektion på *x*-aksen have en længde svarende til $\cos v$.



enhedscirkel, radius=1

Projektionen på x-aksen af vinkel ***w***'s skærings-punkt (**Q**) med cirkelperiferien vil have en afstand fra cirklens centrum svarende til $\cos w$ (på tegningen vil $\cos w$ være et negativ tal).

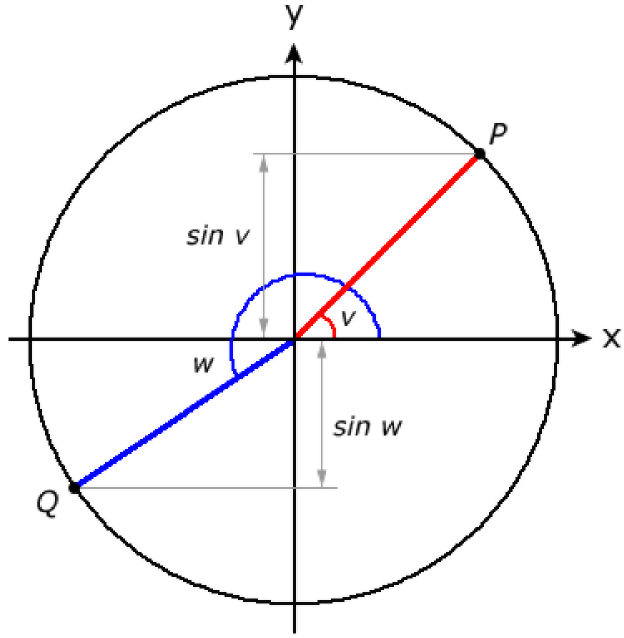
Som det fremgår af illustrationen vil en vilkårlig vinkels skæringspunkt med cirkelperiferien kunne projiceres ned på *x*-aksen og størrelsen af cosinus til denne vilkårlige vinkel vil aldrig kunne overstige 1 (da radius i enhedscirklen netop er 1).

Generelt kan fastsættes:

(vinklerne måles i forhold til *x*-aksens positive halvdel)

- Cosinus til 0° er lig med 1
- Cosinus til 180° er lig med -1
- Cosinus til 90° er lig med 0
- Cosinus til 270° er lig med -1
- Cosinus til vinklen er positiv indenfor intervallet $[0^\circ | 90^\circ[$
- Cosinus til vinklen er negativ indenfor intervallet $]90^\circ | 270^\circ[$
- Cosinus til vinklen er positiv indenfor intervallet $]270^\circ | 360^\circ[$

Sinus (sin)



enhedscirkel, radius=1

I en *enhedscirkel* (hvor radius er lig med 1) begrænser en ret linie (den røde) sammen med x-aksen vinklen ***v*** med toppunkt i cirklens centrum. Når denne linies skæringspunkt (**P**) med cirkelperiferien projiceres (nedfældes vinkelret) på y-aksen, da vil afstanden fra cirklens centrum til **P**'s projektion på *y*-aksen have en længde svarende til $sin\ v$.

Projektionen på y-aksen af vinkel ***w***'s skærings-punkt (**Q**) med cirkelperiferien vil have en afstand fra cirklens centrum svarende til $sin\ w$ (på tegningen vil $sin\ w$ være et negativ tal).

Som det fremgår af illustrationen vil en vilkårlig vinkels skæringspunkt med cirkelperiferien kunne projiceres ind på *y*-aksen og størrelsen af sinus til denne vilkårlige vinkel vil aldrig kunne overstige 1 (da radius i enhedscirklen netop er 1).

Generelt kan fastsættes:

(vinklerne måles i forhold til *x*-aksens positive halvdel)

- Sinus til 0° er lig med 0
- Sinus til 180° er lig med 0
- Sinus til 90° er lig med 1
- Sinus til 270° er lig med -1
- Sinus til vinklen er positiv indenfor intervallet $]0^\circ | 180^\circ[$
- Sinus til vinklen er negativ indenfor intervallet $]180^\circ | 360^\circ[$

Opgave 1 – cosinus og sinus til en vinkel

Talværdierne $cos\ v$ og $sin\ v$ (hvor ***v*** er en given vinkel) kaldes også for vinklens funktionsværdier for henholdsvis *cosinus* og *sinus*.

Tegn på et stykke papir en enhedscirkel med radius 10 cm ($enheden\ 1 = 10\ cm$).
Du kan med fordel benytte et stykke millimeterpapir, som du selv kan printe fra denne webside (nederst): http://togk.eucnordvest.dk/matematik/opgaver.asp

1. Afsæt følgende vinkler (i forhold til x-aksens positive del) og aflæs vinklernes cosinus- og sinus-funktionsværdi. Skriv værdierne i skemaet herunder.
2. Beregn funktionsværdierne med lommeregner og sammenlign.

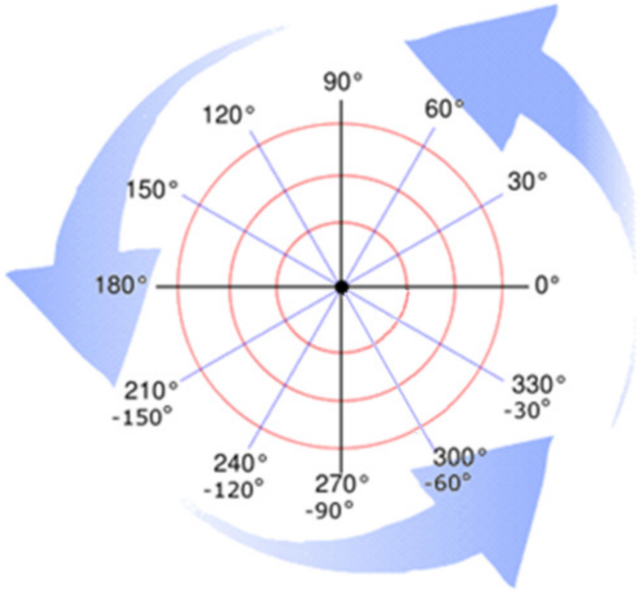
Vinkel *v*	**Målt**		**Beregnet**	
	cos v	*sin v*	*cos v*	*sin v*
0°				
15°				
30°				
45°			1	2
60°				
90°				
135°				2
210°				
315°			1	

Vær særlig opmærksom på beregningsfelterne mærket med henholdsvis $_1$ og $_2$
Du skulle gerne opdage noget interessant omkring de tilsvarende funktionsværdier.

Læs mere herom på næste side...

Vinkler med fortegn
(der regnes ikke med negative vinkler i trekanter)

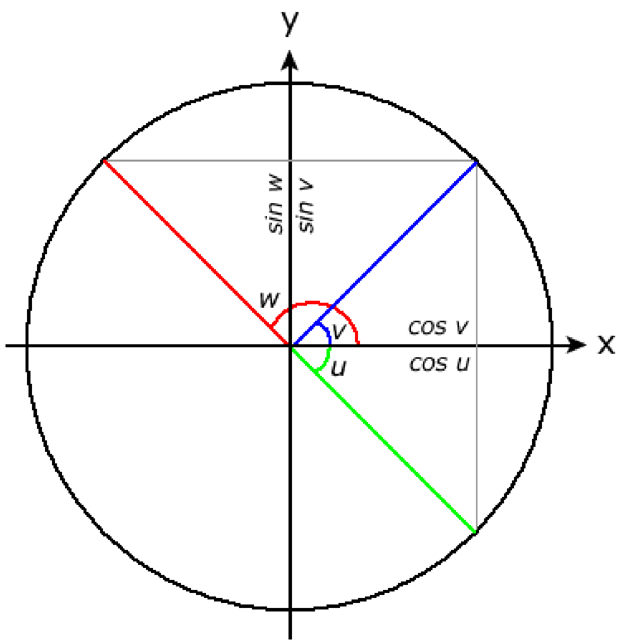
Ofte angives vinkler med fortegn i forhold til den valgte *referenceakse* sædvanligvis den vandrette mod højre.
Der regnes som udgangspunkt med korteste afstand fra referenceaksen (den positive del af x-aksen) til stedvektoren, - dermed kan en vinkel sagtens optræde negativ.



På illustrationen angiver pilene den positive omløbsretning (mod uret).
Det bemærkes, at i tredje og fjerde kvadrant er vinklerne tillige angivet som negative vinkler udgående fra 0° med retning højre om med uret mod 180°.

Det betyder, at en vinkel beliggende i tredje eller fjerde kvadrant kan noteres med en negativ vinkel i forhold til referenceaksen $\left(240^\circ \; svarer \; alts\text{å} \; til \; -120^\circ\right)$.

Vinkler og funktionsværdier
Se illustrationen til højre...



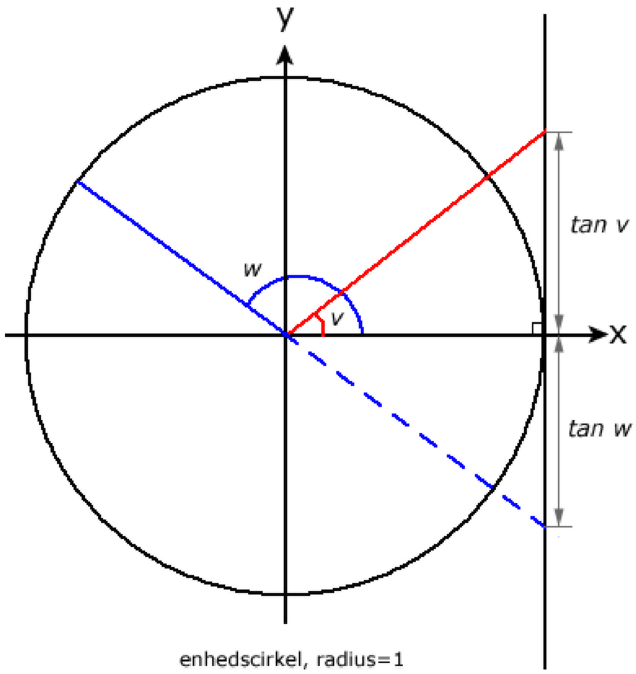
enhedscirkel, radius=1

Det fremgår tydeligt af illustrationen til højre, at der til enhver funktionsværdi for enten *cosinus* eller *sinus* findes <u>to</u> vinkler, der vil have den pågældende funktionsværdi til fælles.

Eksempler herpå:

$$sin(45^\circ) = \sin(135^\circ) \cong 0{,}7071$$

$$cos(30^\circ) = cos(330^\circ) = cos(-30^\circ) \cong 0{,}8660$$



Tangens (tan eller tg)

Når der i forbindelse med en cirkel tegnes en ret linie, der er vinkelret på cirklens radius og kun rører cirklen i et eneste punkt, kaldes denne linie for en tangent.

Når vi skal bruge en sådan tangent i forbindelse med trigonometriske beregninger, oprejses tangenten i punktet:

$$(x \mid y) = (1 \mid 0)$$

En anden ret linie (den røde) begrænser sammen med x-aksen vinklen ***v*** med toppunkt i cirklens centrum. Når denne linies forlænges ud over cirkelperiferien, vil afstanden fra *x*-aksen i punktet $(x \mid y) = (1 \mid 0)$ til liniens skæringspunkt med tangenten have en længde svarende til *tangens* for vinkel *v* ($\tan v$).

For at finde vinkel ***w***'s skærings-punkt med tangenten bliver vi nødt til at forlænge det venstre vinkelben (den blå) "bagud" til den skærer tangenten. Herved vil afstanden fra *x*-aksen i punktet $(x \mid y) = (1 \mid 0)$ til liniens skæringspunkt med tangenten til have en længde svarende til *tangens* til vinkel *w* ($\tan v$), - på tegningen vil $\tan v$ være et negativ tal.

Der findes to vinkler (180° forskudt), der har samme funktionsværdi for tangens.

Størrelsen af tangens til en vinkel vil – i modsætning til cosinus og sinus - kunne overstige 1 og antage en værdi gående mod uendelig (∞) i positiv/negativ retning.

Generelt kan fastsættes:

- Tangens til 0° er lig med 0
- Tangens til 180° er lig med 0
- Tangens til 90° er lig *ikke defineret* (vinkelbenet er parallelt med tangenten)
- Tangens til 270° er *ikke defineret* (vinkelbenet er parallelt med tangenten)
- Tangens til vinklen er positiv indenfor intervallet $[\,0^\circ \mid 90^\circ\,[$
- Tangens til vinklen er negativ indenfor intervallet $]\,90^\circ \mid 180^\circ\,[$
- Tangens til vinklen er positiv indenfor intervallet $]\,180^\circ \mid 270^\circ\,[$
- Tangens til vinklen er negativ indenfor intervallet $]\,270^\circ \mid 360^\circ\,[$

Vinklen til en given funktionsværdi

Kendes en funktionsværdi (cosinus, sinus eller tangens) til en ukendt vinkel, kan den pågældende vinkel beregnes. Med lommeregner skal du anvende den *inverse* (modsatte) funktion til cosinus, sinus eller tangens afhængig af, hvilken funktionsværdi, der er oplyst, for at udføre beregningen.
På en lommeregner, der understøtter trigonometriske beregninger, hedder disse (lommeregner) funktioner ofte:

- cos^{-1} eller $acos$ (den inverse *cosinus*)
- sin^{-1} eller $asin$ (den inverse *sinus*)
- tan^{-1} eller $atan$ (den inverse *tangens*)

Eksempel:

Beregn $\measuredangle v$ når $\cos v = 0{,}5$

Da der (til alle *cosinus*, *sinus* og *tangens* funktionsværdier) findes to vinkler, der vil resultere i samme funktionsværdi, kan vinkel v i dette eksempel være både $v_1 \; og \; v_2$

Mulighed 1: $v_1 = cos^{-1}(0{,}5) = 60^\circ$

Mulighed 2: $v_2 = 360^\circ - v_1 = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

Mulighed 2 regnet med fortegn: $v_2 = -(v_1) = -60^\circ$

Opgave 2 – vinklen til en given funktionsværdi

Find de pågældende vinkler, når:

a) $\sin v = 0{,}8660$ **b)** $\cos w = 0{,}7071$ **c)** $\cos u = -0{,}5$ **d)** $\sin v = 0{,}1736$

e) $\sin w = -0{,}8660$ **f)** $\sin u = -0{,}5$ **g)** $\cos v = -1$ **h)** $\sin v = -1$

i) $\tan u = 0{,}5$ **j)** $\tan w = -1$ **k)** $\tan v = 0{,}3639$

Opgave 3 – tangens til vinklen

Find tangens funktionsværdien til følgende vinkler
Bemærk, hvor meget funktionsværdien øges, blot der "sættes" en decimal mere på.

a) 89° **b)** $89{,}9^\circ$ **c)** $89{,}99^\circ$ **d)** $89{,}999^\circ$

Sammenhængen mellem cos, sin og tan

Sammenhængen mellem cosinus-, sinus- og tangens funktionsværdierne til en given vinkel kan udtrykkes med denne relation:

$$\tan v \;=\; \frac{\sin v}{\cos v}$$

$$v \neq 90^\circ + p \cdot 180 \;(\, p \in \mathbb{Z}\,)$$

"Idiotformlen"

I en enhedscirkel kan vinkel *v´s* skæringspunkt **P** med cirkelperiferien altså beskrives med koordinaterne $(\,x \mid y\,) = (\cos v \mid \sin v\,)$.

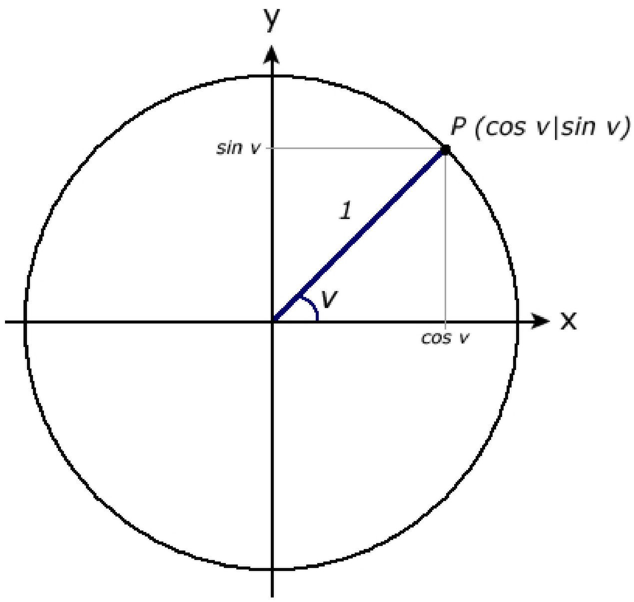
Koordinater kan også skrives på formen: $(\,x\,, y\,) = (\cos v\,, \sin v\,)$

Vinkel *v´s* venstre vinkelben udgør hypotenusen i en retvinklet trekant, hvor kateterne udgøres af henholdsvis *cos v* og *sin v*, - hypotenusen har længden 1 (radius i enhedscirklen).

Med *Pythagoras' læresætning* ($a^2 + b^2 = c^2$) for retvinklede trekanter får vi følgende:

$$\cos v^2 + \sin v^2 = 1$$

Denne formel kaldes også for "*idiotformlen*"



enhedscirkel, radius=1

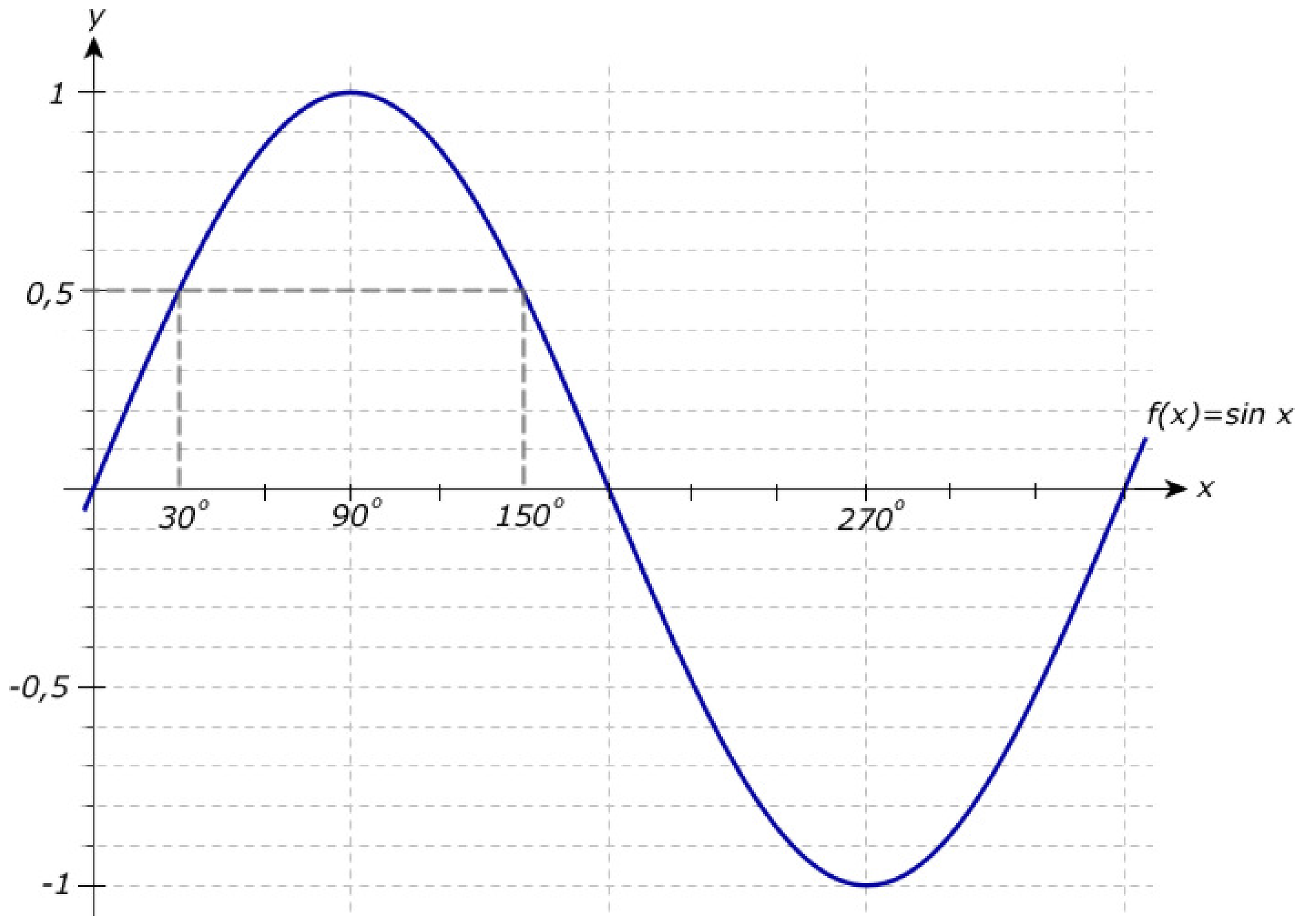
Grafen for sinus funktionen

I det nedenstående koordinatsystem er funktionen $\sin(x)$ indtegnet for den uafhængige variabel x i intervallet fra 0° til 360° - skrives også som $x \in [\,0° |\, 360°\,[$.
Dette kaldes også for definitionsmængden for $f(x)$.

Som det fremgår af grafen, vil funktionsværdien $f(x)$ for intervallet $x \in [\,0° |\, 360°[$ resultere i, at den afhængige variabel y vil ligge i intervallet $[\,-1 \mid 1\,]$.
Dette kaldes også for værdimængden for $f(x)$.

Som tidligere nævnt, er der til enhver funktionsværdi for *sinus* to vinkler, der har den pågældende funktionsværdi til fælles, - et eksempel herpå er vist på grafen, hvor funktionsværdien 0,5 vil fremkomme både ved 30°og ved 150°.

$$f(30°) = f(150°) = 0{,}5$$



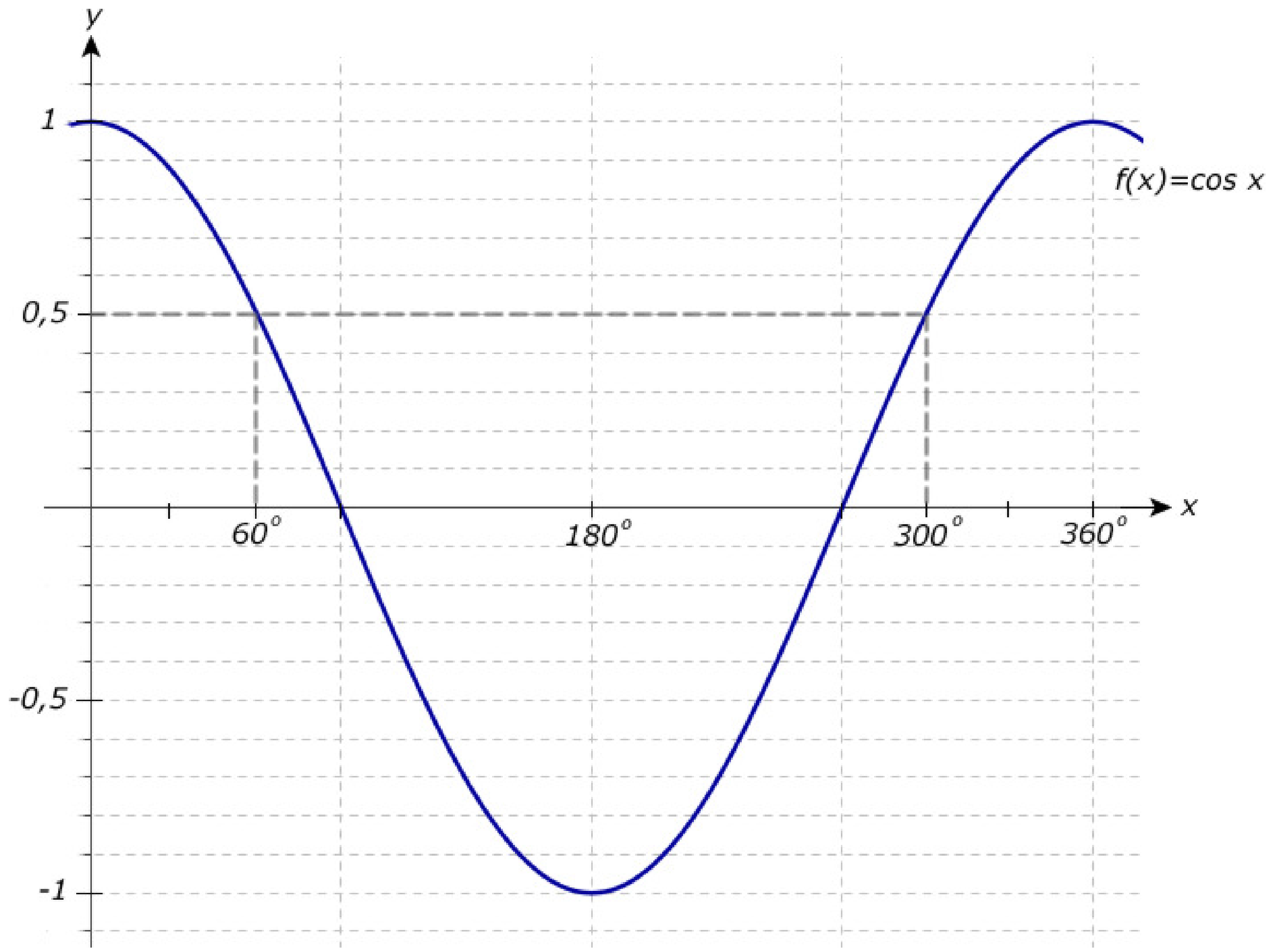
Grafen for cosinus funktionen

I det nedenstående koordinatsystem er funktionen $\cos(x)$ indtegnet for den uafhængige variabel i intervallet fra 0˚ til 360˚ - skrives også som $x \in [\,0°|\,360°\,[$. Dette kaldes også for definitionsmængden for $f(x)$.

Som det fremgår af grafen, vil funktionsværdien $f(x)$ for intervallet $x \in [\,0°|\,360°\,[$ resultere i, at den afhængige variabel y vil ligge i intervallet $[\,-1\,|\,1\,]$.
Dette kaldes også for værdimængden for $f(x)$.

Som tidligere nævnt, er der til enhver funktionsværdi for *cosinus* to vinkler, der har den pågældende funktionsværdi til fælles, - et eksempel herpå er vist på grafen, hvor funktionsværdien 0,5 vil fremkomme både ved 60˚og ved 300˚.

$$f(60°) = f(300°) = 0{,}5$$



Grafen for tangens funktionen

I koordinatsystemet her er funktionen $\tan(x)$ indtegnet for den uafhængige variabel x.

$$x \in [\,0° \,|\, 360°\,[$$

hvor $x \neq 90^{\circ} + p \cdot 180^{\circ}$ ($p \in \mathbb{Z}$).

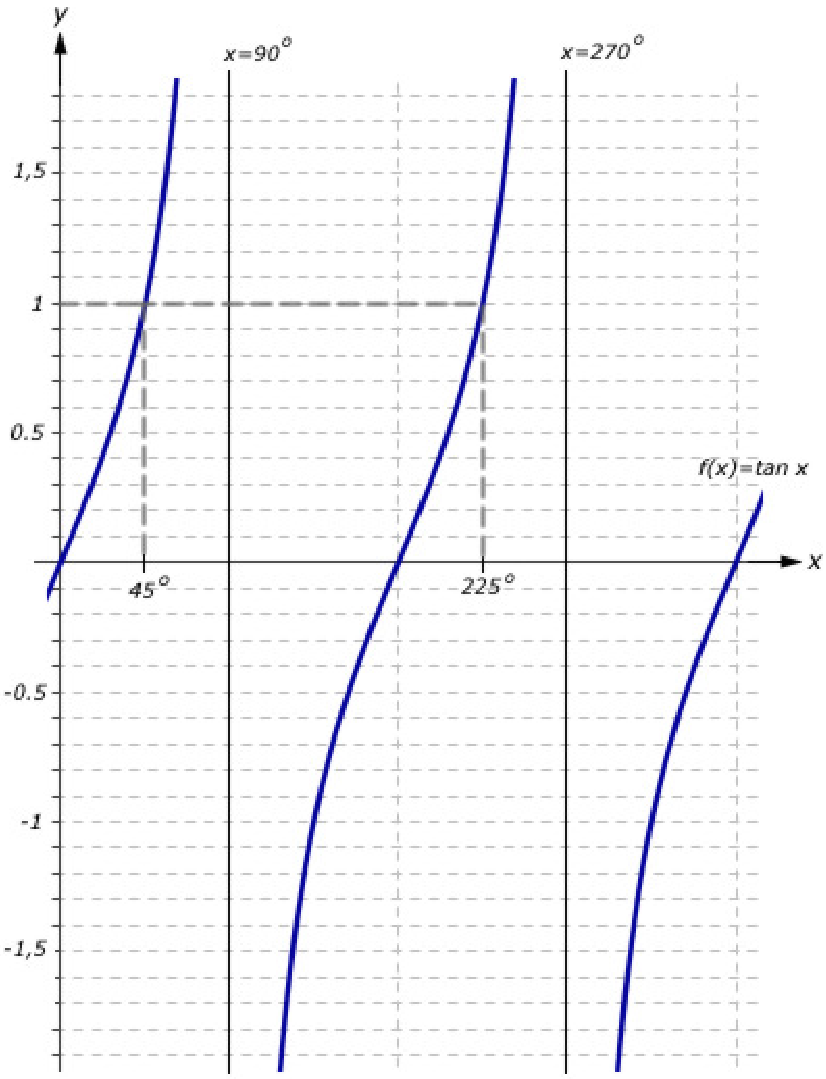
Hvilket vil sige i intervallet fra *0° til 360°* (dog ikke for *90° og 270°*), som der ved bliver definitions-mængden for $f(x)$.

Som det fremgår af grafen, vil funktionsværdien $f(x)$ for denne mængde resultere i, at den afhængige variabel y vil ligge indenfor intervallet

$$y \in \,]-\infty \,|\, \infty\,[$$

Hvilket betyder *fra minus uendeligt til uendeligt*.
Dette kaldes også for værdimængden for $f(x)$.

Som tidligere nævnt, er der til enhver funktionsværdi for *tangens* to vinkler, der har den pågældende funktions-værdi til fælles.



Et eksempel herpå er vist på grafen, hvor funktions-værdien 1 vil fremkomme både ved 45°og ved 225°.
Hvilket også kan udtrykkes som: $f(45°) = f(225°) = 1$.

De lodrette linier, der er indtegnet ved $x = 90^{\circ}$ og ved $x = 270^{\circ}$ er såkaldte *asymptoter*, hvilket betyder, at kurven vil nærme sig disse linier, når x konvergerer mod (går mod) henholdsvis *90°* og *270°* fra både højre og venstre side, men vil aldrig "ramme" linierne, da funktionen $\tan x$ ikke er defineret for *90°* og *270°*.
I stedet vil funktionsværdien konvergere mod *minus uendeligt* eller *uendeligt*.
Eksempelvis kan dette udtrykkes som: $f(x) \to \infty$ for $x \to 90^{\circ}_{+}$

Læses: funktionsværdien for *x* går mod uendeligt for *x* gående mod 90° (fra 0° mod 90°).

Ordet "Trigonometri"

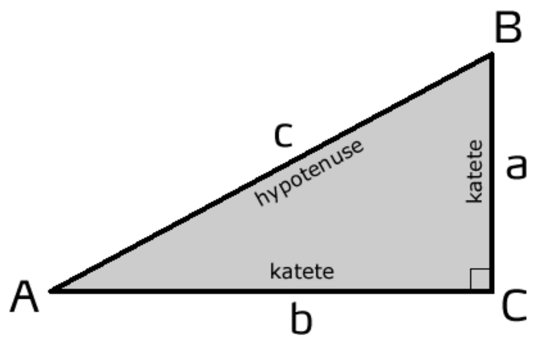
Begrebet ***trigonometri*** stammer oprindelig fra græsk og betyder *trekantmåling*. (*tri-gono-metri* → *tre-kant-måling*)
Trigonometrien bruges til beregning af ukendte stykker i trekanter – hvilket vil sige sidelængder og vinkler. Til sammenligning kan *Pythagoras' læresætning* $(a^2 + b^2 = c^2)$ bruges til beregning af en sidelængde i en trekant, når man kender længden af de to øvrige sider.
Med trigonometrien kan en vilkårlig sidelængde eller vinkel i en trekant beregnes, når blot man kender tre af trekantens stykker, - dog mindst **én** sidelængde.
I en retvinklet trekant skal man kende to stykker (*mindst én sidelængde*) udover den rette vinkel $(\measuredangle C = 90°)$ for at kunne beregne de øvrige stykker i trekanten.

Retvinklede trekanter

I det efterfølgende vil de tre trigonometriske funktioner (*sinus*, *cosinus* og *tangens*) blive behandlet for en retvinklet trekant. De tre trigonometriske funktioner udtrykker her forskellige sammenhænge mellem trekantens sidelængder og dens vinkler.

Trekantens betegnelser

I en retvinklet trekant bruges følgende betegnelser om siderne og vinklerne,
- jf. skitsen til højre.



Katete **a** kaldes vinkel **A**'s *modstående* side
Katete **b** kaldes vinkel **A**'s *hosliggende* side

Katete **b** kaldes vinkel **B**'s *modstående* side
Katete **a** kaldes vinkel **B**'s *hosliggende* side

Den rette vinkel $(90°)$ kaldes (som det ses) altid for **C**.
Hypotenusen **c** vil altid være den længste side i en retvinklet trekant.

Cosinus til en spids vinkel i en retvinklet trekant er forholdet mellem den hosliggende katete og hypotenusen.

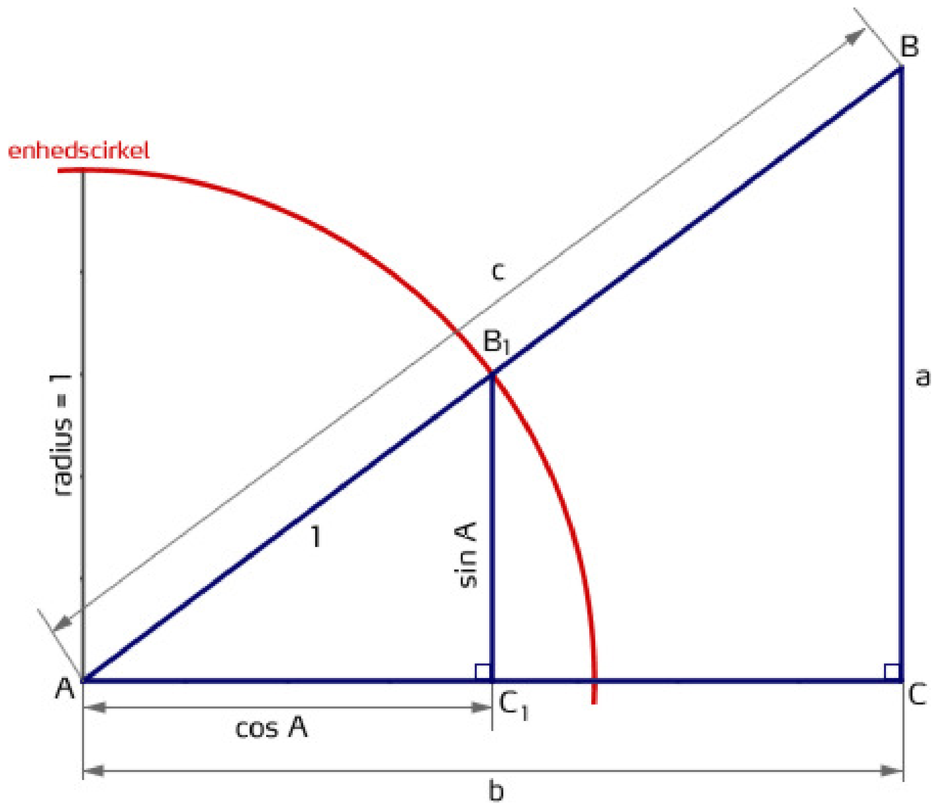
Sinus til en spids vinkel i en retvinklet trekant er forholdet mellem den modstående katete og hypotenusen.

Tangens til en spids vinkel i en retvinklet trekant er forholdet mellem den modstående katete og den hosliggende katete.

Indledning til formler

I dette afsnit udledes formlerne til beregninger med *cosinus*, *sinus* og *tangens* funktionerne i en *vilkårlig* retvinklet trekant.

I nedenstående skitse er der i en enhedscirkel indtegnet en retvinklet trekant AB_1C_1 med kateterne $sin\ A$ og $cos\ A$ og $hypotenusen = 1$.
Tillige er indtegnet en vilkårlig retvinklet trekant ABC med kateterne ***a*** og ***b*** samt hypotenusen ***c***.
Som det tydeligt fremgår af skitsen har ensliggende vinkler i de to trekanter samme værdi $(f x. er\ \angle B_1 = \angle B)$, derved er trekanterne ligedannede, hvilket er ensbetydende med, at trekant ABC er en forstørrelse af trekant AB_1C_1.
Derved vil et forhold mellem to sider i den ene trekant være identisk med forholdet mellem de ensliggende sider i den anden trekant, hvilket giver muligheden for at udlede trigonometriske formler, der kan anvendes på vilkårlige retvinklede trekanter.



Læs mere på næste side...

Fortsat fra forrige side…

Udledning af cosinus formel

Med udgangspunkt i skitsen på forrige side opstilles et forhold mellem katete ***b*** og hypotenusen ***c*** i trekant ABC, der altså er identisk med det tilsvarende forhold i trekant AB_1C_1 (dette kaldes for en relation), derved kan formlen for *cosinus* udledes:

$$\frac{b}{c} = \frac{cos\ A}{1} \quad \Longrightarrow \quad cos\ A = \frac{b}{c}$$

Derved gives:

$$\angle A = cos^{-1}\left(\frac{b}{c}\right)$$

Udtrykt med ord:

Cosinus til *vinkel A* $(cos\ A)$ i en vilkårlig retvinklet trekant kan beregnes som den hosliggende katete ***b*** divideret med hypotenusen ***c***.

Vinkel A kan altså beregnes som den *inverse* cosinus til forholdet mellem den hosliggende katete ***b*** og hypotenusen **c**.

Generelt kan siges:

I en retvinklet trekant kan *cosinus* til en (spids) vinkel – altså ikke den rette vinkel – beregnes som den *hosliggende* katete divideret med *hypotenusen*.

$$cosinus = \frac{hosliggende\ katete}{hypotenuse}$$

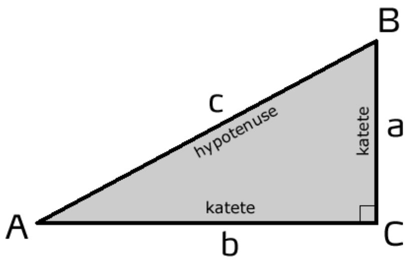
Eksempel:

I en retvinklet trekant sættes katete ***b*** til 4 cm og hypotenusen ***c*** til 5 cm.

- Beregn $cos\ A$ samt $\angle A$

1. $cos\ A = \dfrac{b}{c} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

2. $\angle A = cos^{-1}\left(\dfrac{b}{c}\right) = cos^{-1}\left(\dfrac{4}{5}\right) = 36{,}87^{\circ}$



Udledning af sinus formel

Med udgangspunkt i skitsen på side 14 opstilles et forhold mellem katete ***a*** og hypotenusen ***c*** i trekant ABC, der er identisk med til det tilsvarende forhold i trekant AB_1C_1 (dette kaldes også for en relation), derved kan formlen for *sinus* udledes:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{1} \quad \Longrightarrow \quad \sin A = \frac{a}{c}$$

Derved gives:

$$\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)$$

Udtrykt med ord:

Sinus til *vinkel A* $(\sin A)$ i en vilkårlig retvinklet trekant kan beregnes som den modstående katete ***a*** divideret med hypotenusen ***c***.

Vinkel A kan altså beregnes som den *inverse* sinus til forholdet mellem den modstående katete ***a*** og hypotenusen **c**.

Generelt kan siges:

I en retvinklet trekant kan *sinus* til en (spids) vinkel – altså ikke den rette vinkel – beregnes som den *hosliggende* katete divideret med *hypotenusen*.

$$sinus = \frac{modstående\ katete}{hypotenuse}$$

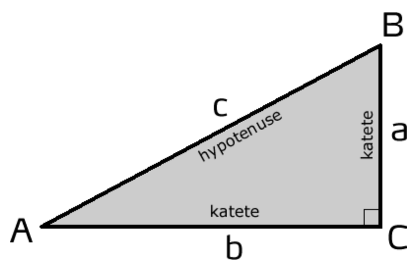
Eksempel:

I en retvinklet trekant sættes katete ***a*** til 3 cm og hypotenusen ***c*** til 5 cm.

- Beregn $\sin A$ samt $\angle A$

1. $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

2. $\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 36{,}87^\circ$



Udledning af tangens formel

Med udgangspunkt i skitsen tilbage på side 14 opstilles nu et forhold mellem katete ***a*** og katete ***b*** i trekant ABC, der er identisk med det tilsvarende forhold i trekant AB_1C_1 (dette kaldes også for en relation), derved kan formlen for *tangens* udledes:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\cos A} \quad \Longrightarrow \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} \quad (\text{ se side 9 øverst })$$

Derved gives:

$$\angle A = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

Udtrykt med ord:

Tangens til *vinkel A* $(\tan A)$ i en vilkårlig retvinklet trekant kan beregnes som den modstående katete ***a*** divideret med den hosliggende katete ***b***.

Vinkel A kan altså beregnes som den *inverse* tangens til forholdet mellem den modstående katete ***a*** og den hosliggende katete ***b***.

Generelt kan siges:

I en retvinklet trekant kan *tangens* til en (spids) vinkel – altså ikke den rette vinkel – beregnes som den *modstående* katete divideret med den *hosliggende* katete.

$$tangens = \frac{modstående\ katete}{hosliggende\ katete}$$

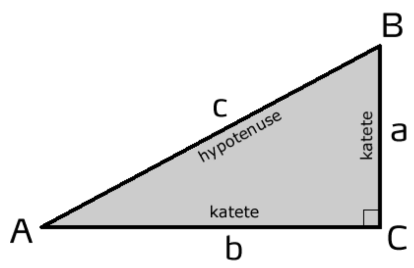
Eksempel:

I en retvinklet trekant sættes katete ***a*** til 3 cm og katete ***b*** til 4 cm.

- Beregn $\tan A$ samt $\angle A$

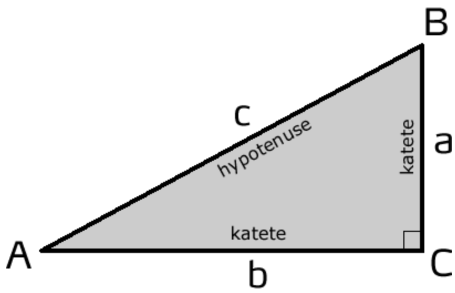
1. $\tan A = \frac{a}{b} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

2. $\angle A = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36{,}87^\circ$



Oversigt over formler

Når en given opgave med trigonometri og retvinklede trekanter skal løses, vil det være en god idé, at man starter med at tegne en retvinklet trekant og derefter benævne sidestykker og vinkler – husk at benævne den rette vinkel for ***C*** (se illustrationen til højre).



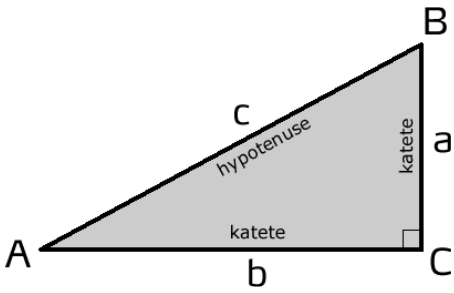
Herefter kan man med fordel skrive de kendte værdier på skitsen, husk at du skal kende til mindst to oplysninger udover den rette vinkel - heraf mindst én side.
Med de kendte værdier påført kan nedenstående skema bruges som løsningsmodel for beregning af de ukendte stykker (sider og/eller vinkler).

	Kendte værdier	Formler til bestemmelse af ukendte stykker		
1	Siden ***a*** og ***c***	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$	$A = sin^{-1}(a/c)$	$B = cos^{-1}(a/c)$
2	Siden ***b*** og ***c***	$a = \sqrt{c^2 - b^2}$	$A = cos^{-1}(b/c)$	$B = sin^{-1}(b/c)$
3	Siden ***a*** og ***b***	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$A = tan^{-1}(a/b)$	$B = tan^{-1}(b/a)$
4	Siden ***c*** og $\angle A$	$a = c \cdot sin\ A$	$b = c \cdot cos\ A$	$B = 90^\circ - A$
5	Siden ***c*** og $\angle B$	$a = c \cdot cos\ B$	$b = c \cdot sin\ B$	$A = 90^\circ - B$
6	Siden ***a*** og $\angle B$	$c = \frac{a}{cos\ B}$	$b = a \cdot tan\ B$	$A = 90^\circ - B$
7	Siden ***b*** og $\angle A$	$c = \frac{b}{cos\ A}$	$a = b \cdot tan\ A$	$B = 90^\circ - A$
8	Siden ***a*** og $\angle A$	$c = \frac{a}{sin\ A}$	$b = \frac{a}{tan\ A}$	$B = 90^\circ - A$
9	Siden ***b*** og $\angle B$	$c = \frac{b}{sin\ B}$	$a = \frac{b}{tan\ B}$	$A = 90^\circ - B$

Opgave 4

Beregn de manglende sider og vinkler i de efterfølgende (7) retvinklede trekanter.

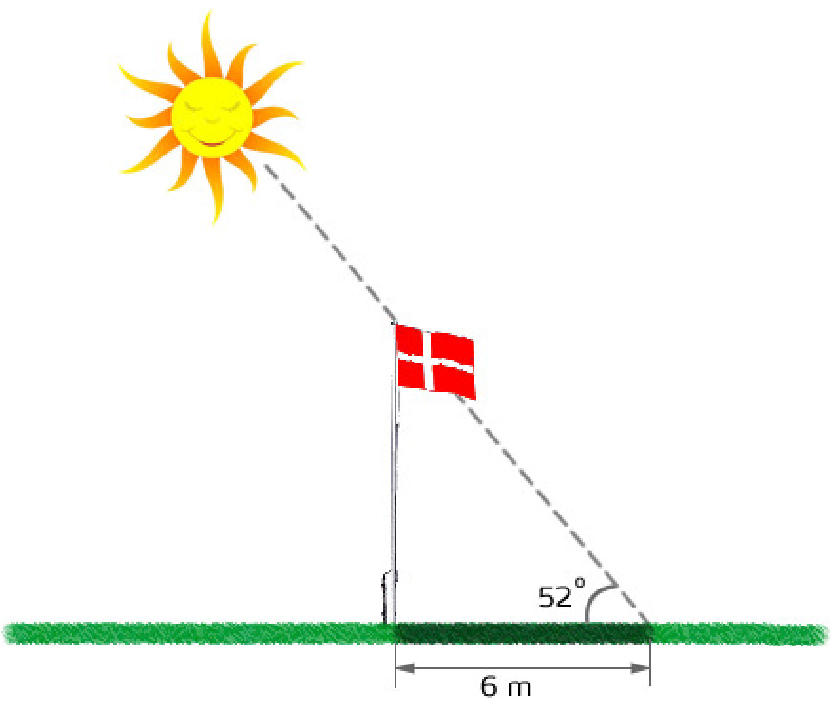
1. Vinkel A = 37° og b = 13 cm
2. Vinkel A = 33° og a = 12 cm
3. Vinkel B = 46° og a = 12 cm
4. a = 3 cm og c = 5 cm
5. b = 12 cm og c = 26 cm
6. a = 10 cm og b = 13 cm
7. b = 5 cm og c = 12 cm



Opgave 5

En flagstang kaster (på en solskinsdag ☺) en skygge, der måler 6 meter fra flagstangens fod. Solen har en højde over horisonten på 52° målt i forhold til vandret.

- Hvor høj er flagstangen?

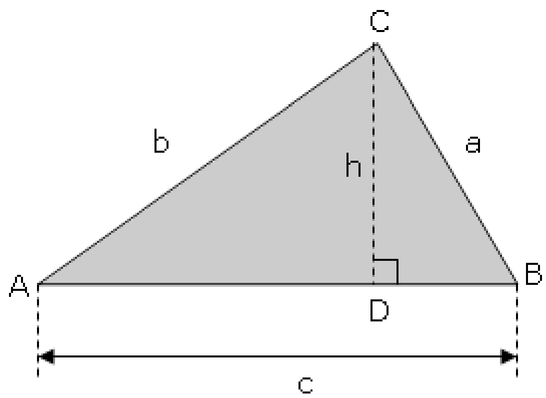


Vilkårlige trekanter

Med vilkårlige trekanter menes trekanter, der ikke er retvinklede.

Når vi arbejder med en vilkårlig trekant, - altså en trekant, der ikke er retvinklet – kan vi ikke anvende Pythagoras' læresætning og de "normale" trigonometriske regneregler til beregning af trekantens sider og vinkler.
Det er derfor nødvendigt, at anvende andre metoder til beregning af disse værdier, - et par meget brugbare metoder er *sinusrelationen* og *cosinusrelationen*.

Sinusrelationen



Af trekant ACD (*se figuren til højre*) kan udledes at:

$$\sin A = \frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad h = b \cdot \sin A$$

Af trekant BCD (*se figuren til højre*) kan udledes at:

$$\sin B = \frac{h}{a} \quad \Rightarrow \quad h = a \cdot \sin B$$

Da højden $\boldsymbol{h}$ er den samme i begge tilfælde, medfører dette følgende:

$$b \cdot \sin A = a \cdot \sin B$$

Hvilket kan omskrives til:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

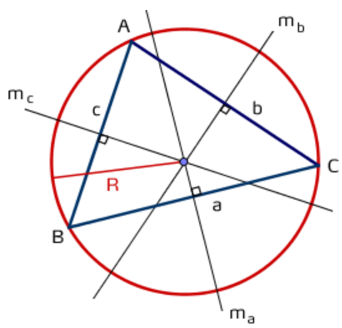
Et tilsvarende forhold kan udledes for $\angle$ ***C***, - sammenholdes dette med ovenstående, fremkommer den såkaldte *sinusrelation*:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Det kan påvises, at sinusrelationen er lig med $2 \cdot R$, hvor $\boldsymbol{R}$ er radius til trekantens *omskrevne* cirkel:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2 \cdot R$$

a, b og c er trekantens sider
A, B og C er trekantens vinkler
R er radius til trekantens omskrevne cirkel

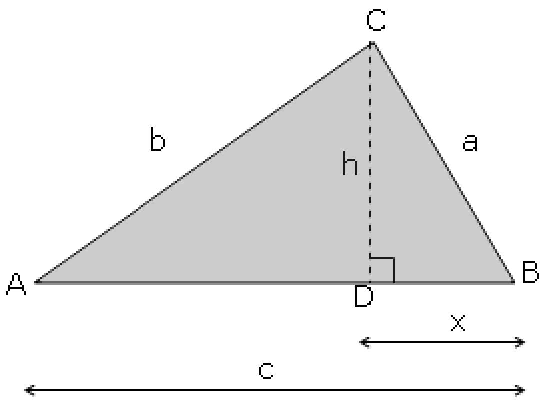


Falder højden udenfor trekanten (*ved stumpvinklede trekanter*), gælder sinusrelationen stadig.

Cosinusrelationen

Da vi ikke kan anvende Pythagoras' læresætning og de "normale" trigonometriske regneregler, når der arbejdes med vilkårlige trekanter, er det som tidligere nævnt, nødvendigt at anvende andre metoder til beregningerne, - en anden af de brugbare metoder er *cosinusrelationen*.

Af *trekant BCD* (*se figuren til højre*) får vi:



$$sin\,B = \frac{h}{a} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{h} = a \cdot sin\,B$$

$$cos\,B = \frac{x}{a} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} = a \cdot cos\,B$$

Ved anvendelse af *Pythagoras' læresætning* ($a^2 + b^2 = c^2$) på *trekant ACD* fås:

$$b^2 = h^2 + (c - x)^2$$

$$b^2 = h^2 + c^2 + x^2 - 2xc$$

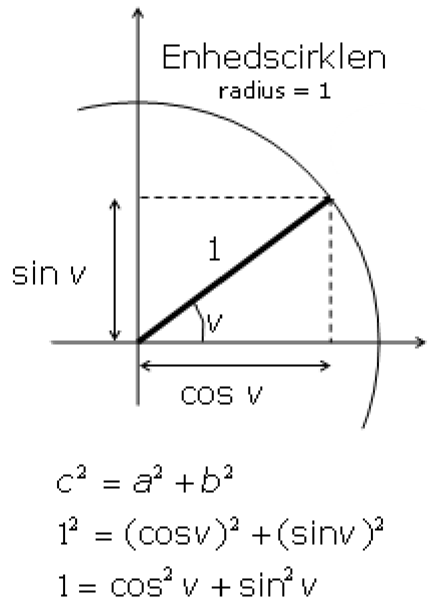
*Vi indsætter nu de tidligere udledte "værdier" for **h** og **x**:*

$$b^2 = (a \cdot sin\,B)^2 + c^2 + (a \cdot cos\,B)^2 - 2c(a \cdot cos\,B)$$

$$b^2 = a^2 sin^2 B + c^2 + a^2 cos^2 B - 2ac \cdot cos\,B$$

$$b^2 = a^2(sin^2 B + cos^2 B) + c^2 - 2ac \cdot cos\,B$$

$Se\ skitsen\ til\ højre: \quad \boldsymbol{sin^2 B + cos^2 B = 1} \quad deraf\ følger:$



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\,B$$

$hvilket\ kan\ omskrives\ til:$

$$cos\,B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Fortsættes næste side...

Fortsat fra forrige side...

Ved passende ombytning af bogstaverne i formlerne på forrige side, kan de tilsvarende formler for ***a*²**, ***c*²**, ***cos A*** og ***cos C*** udledes på tilsvarende vis.

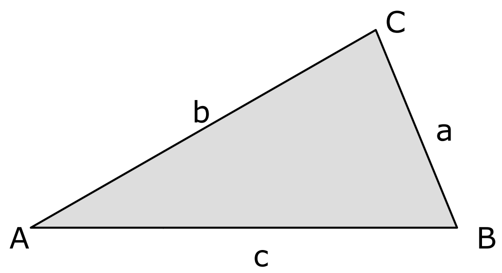
Således fremkommer følgende formler, der kan benytte ved beregninger af liniestykker og vinkler i en vilkårlig *ikke retvinklet* trekant:

Cosinusrelationerne:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$



Eller omskrevet:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

(Hvis højden falder uden for trekanten, gælder cosinusrelationen stadig).

Opgave 6

Om den vilkårlige trekant ABC oplyses følgende:

- $b = 6\ cm$
- $c = 9\ cm$
- $A = 60^\circ$

Beregn siden ***a*** og vinklerne ***B*** og ***C***.